

## Уравнения Рейнольдса для компоненты скорости, температуры и концентрации.

Возьмем уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2)$$

Метод осреднения Рейнольдса заключается в замене случайно изменяющихся характеристик потока (скорость, давление, плотность) суммами осреднённых и пульсационных составляющих.

$$u_i = U_i + u'_i \quad (3)$$

$$U_i = \frac{1}{T} \int_{T-t/2}^{T+t/2} u dt$$

Эти осреднения имеют некоторые свойства:

- 1) Если мы будем осреднять осреднюю величину  $U_i$ , то все равно получим среднюю.
- 2) Средняя от пульсационной компоненты  $u'_i$  равняется нулю

Используя уравнения неразрывности (2), напишем уравнения (1) в таком виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_k u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$$

$$\frac{\partial u_k u_i}{\partial x_k} = u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

подставим (3) в (1)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (U_i + u'_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_k + u'_k) (U_i + u'_i) = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p') + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (U_i + u'_i) \\ & \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i u'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k u'_i}{\partial x_k} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Осредняем последнее уравнение и используя свойство осреднения получим

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_k u'_i}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial \bar{u}'_k u'_i}{\partial x_k}$$

Возьмем уравнение для температуры и поделаем тоже самое, что сделали для компоненты скорости

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2}$$

$$T = \bar{T} + t' \quad u_i = U_i + u'_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{T} + t') + \frac{\partial}{\partial x_k} ((\bar{T} + t')(U_i + u'_i)) = a \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\bar{T} + t')$$

Последнее уравнение перепишем в таком виде

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{T} U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{T} u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i t'}{\partial x_k} + \frac{\partial t' u'_i}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k^2} + a \frac{\partial^2 t'}{\partial x_k^2}$$

Осредняя последнее уравнение и используя свойство осреднения получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{T} U_i}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k^2} - \frac{\partial t' u'_i}{\partial x_k}$$

А для уравнения концентрации и поделаем тоже самое, что сделали для компоненты скорости и температуры

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_k \frac{\partial C}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 C}{\partial x_k^2}$$

$$C = \bar{C} + c' \quad u_i = U_i + u'_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{C} + c') + \frac{\partial}{\partial x_k} ((\bar{C} + c')(U_i + u'_i)) = a \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\bar{C} + c')$$

Последнее уравнение перепишем в таком виде

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{C} U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{C} u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i c'}{\partial x_k} + \frac{\partial c' u'_i}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_k^2} + a \frac{\partial^2 c'}{\partial x_k^2}$$

Осредняя последнее уравнение и используя свойство осреднения получим что

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{C} U_i}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_k^2} - \frac{\partial c' u'_i}{\partial x_k}$$